Mihael Mihalcea (coord.), Radu-Cătălin Gherghe,
Sorina Lupu, Tudor-Eugen Lupu

# EVALUAREA NAȚIONALĂ

# MATEMATICĂ

## CLASA A VIII-A

**Probleme rezolvate de tipul celor de la Subiectul al III-lea**

R&S RENTROP & STRATON

Portal ÎNVĂȚĂMÂNT
www.portalinvatamant.ro

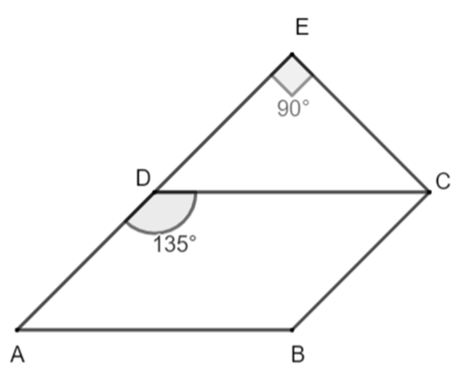
# TESTE

# Testul nr. 1

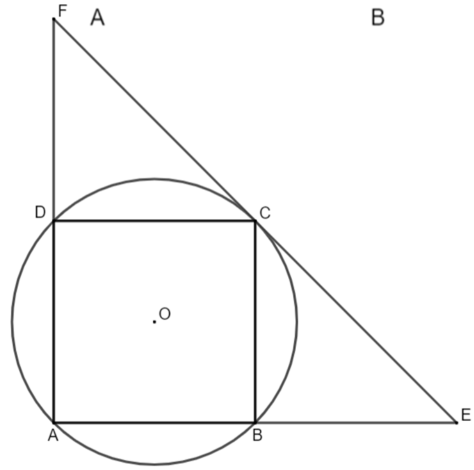
**1.** Într-un gospodărie se găsesc 27 de oi și rațe. Numărul de picioare ale oilor și rațelor este egal cu 78.
**a)** Este posibil ca în gospodărie să se afle 20 de rațe? Justifică răspunsul dat.
**b)** Determină numărul oilor din gospodărie.

**2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}\right):\frac{x^2-49}{(x+5)(x+7)}$, unde $x$ este număr real, $x\neq-5$, $x\neq5$, $x\neq7$.
**a)** Arată că $E(x)=\frac{3}{x-7}$, unde $x$ este număr real, $x\neq-5$, $x\neq5$, $x\neq7$.
**b)** Determină numerele naturale $n$ pentru care $E(n)$ este număr natural.

**3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$.
**a)** Arată că $2\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)=f(0)$.
**b)** Rezolvă în mulțimea numerelor naturale inecuația $f(n)\leq0$.




**4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $\sphericalangle ADC=135^\circ$, $AB=8\,cm$ și $AD=3\sqrt{2}\,cm$, iar triunghiul dreptunghic isoscel $DCE$ are ipotenuza $DC$.
**a)** Arată că punctele $A$, $D$ și $E$ sunt coliniare.
**b)** Determină perimetrul și aria patrulaterului $ABCE$.



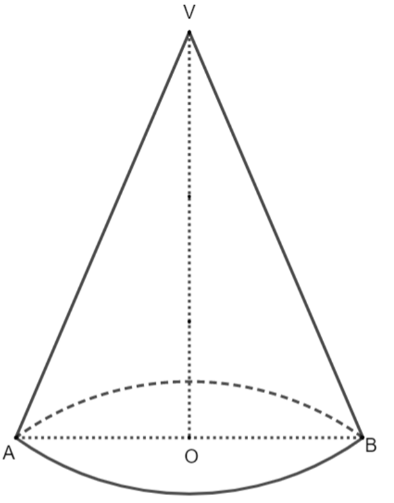

**5.** În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$, înscris într-un cerc de centru $O$ și diametrul de $10\,cm$. Tangenta la cerc în punctul $C$ intersectează dreptele $AB$ și $AD$ în punctele $E$ și $F$.
**a)** Arată că $BD$ este linie mijlocie în triunghiul $EAF$.

**b)** Determină raportul dintre aria cercului și aria patrulaterului $BEFD$.

**6.** În figura alăturată este reprezentat un con cu înălțimea $VO = 24\,cm$ și aria bazei $49\,\pi\,cm^2$.

**a)** Arată că generatoarea conului este egală cu $25\,cm$.

**b)** Determină aria totală și volumul triunghiului de con obținut prin secționarea conului cu un plan paralel cu baza ce împarte înălțimea în două părți egale.




***Idei/Observații/Note***

# SUGESTII
# DE
# REZOLVARE

# Testul nr. 1

**1. a)** **Nu**. Dacă în gospodărie ar fi 20 de rațe atunci numărul oilor ar fi egal cu 7. În acest caz numărul total de picioare ar fi $20\cdot 2+7\cdot 4=20+28=48\neq 78$.

**1. b)** Notăm cu $x$ numărul oilor și cu $y$ numărul rațelor. Obținem următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} x+y=27 \\ 4x+2y=78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=54 \\ 4x+2y=78 \end{cases} \Rightarrow 2x=24, \text{ de unde obținem } x=12.$$

**2. a)** $E(x)=\dfrac{2(x-5)+x+5-10}{(x-5)\cancel{(x+5)}}\cdot\dfrac{\cancel{(x+5)}\cancel{(x+7)}}{(x-7)\cancel{(x+7)}}=\dfrac{2x-10+x+5-10}{(x-5)(x-7)}=\dfrac{3x-15}{(x-5)(x-7)}=$

$=\dfrac{3\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-7)}=\dfrac{3}{x-7}$, unde $x$ este număr real, $x\neq -5$, $x\neq 5$, $x\neq 7$.

**2. b)** $E(n)=\dfrac{3}{n-7}$, unde $n$ este număr natural, $n\neq 5$, $n\neq 7$.

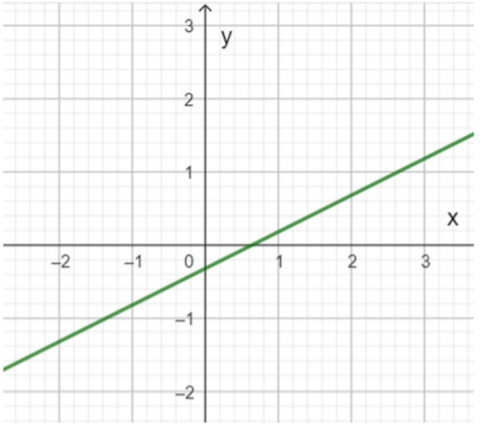
$\dfrac{3}{n-7}$ este număr natural dacă și numai dacă $n-7\in\{1,3\}$. Obținem $n\in\{8,10\}$.

**3. a)** Avem $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}$ și $f(0)=\dfrac{1}{2}\cdot 0-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$.

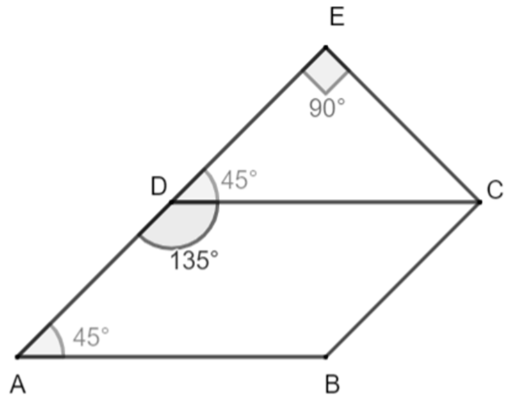
$2\cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right)=2\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{1}{3}=f(0)$.

**3. b)** $\dfrac{1}{2}\cdot n-\dfrac{1}{3}\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cdot n\leq\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow n\leq\dfrac{2}{3}$ și cum $n$ este număr natural rezultă $n=0$.

Soluția poate fi dedusă și din reprezentarea grafică a funcției.



**4. a)** Deoarece triunghiul $EDC$ este dreptunghic isoscel cu $\sphericalangle DEC = 90^\circ$ rezultă că $\sphericalangle EDC = 45^\circ$.
Avem $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADB + \sphericalangle EDC = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, de unde deducem că punctele $A$, $D$ și $E$ sunt coliniare.




**4. b)** În triunghiul $DEC$, $\sphericalangle DEC = 90^\circ$, $\sphericalangle EDC = 45^\circ$.
Rezultă că $\sin\left(\sphericalangle EDC\right) = \dfrac{EC}{DC}$, de unde obținem

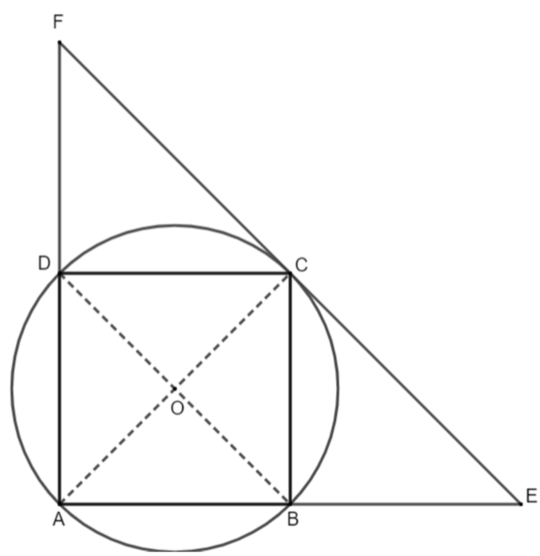
$EC = DC \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\ cm$. Cum triunghiul $EDC$ este isoscel rezultă că $DE = 4\sqrt{2}\ cm$ și obținem $AE = AD + DE = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}\ cm$.

$P_{ABCE} = AB + BC + CE + EA = 8 + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 8 + 14\sqrt{2} = 2\left(4 + 7\sqrt{2}\right) cm$.

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDE = 45^\circ$, unghiuri corespondente determinate de dreptele paralele $AB$ și $CD$ tăiate de secanta $AE$.

$$A_{ABCE} = A_{ABCD} + A_{DCE} = AD \cdot AB \cdot \sin\left(\sphericalangle BAD\right) + \frac{EC \cdot ED}{2} = 8 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 24\ cm^2 + 16\ cm^2 = 40\ cm^2.$$

**5. a)** Evident, punctul $O$ este intersecția diagonalelor pătratului. Avem $EF \perp OC$ și $OC \perp BD$ de unde rezultă că $EF \parallel BD$ și cum $DC \parallel BE$ rezultă că patrulaterul $BDCE$ este paralelogram, deci $BD = CE$.
Analog se arată că $BD = FC$.
Deci, $BD = \dfrac{EF}{2}$. Rezultă că $BD$ este linie mijlocie în triunghiul $AEF$.




**5. b)** Raza cercului este egală cu $5\ cm$, iar latura pătratului este $AB = R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ cm$.
Aria cercului este $A = \pi R^2 = 25\pi\ cm^2$.

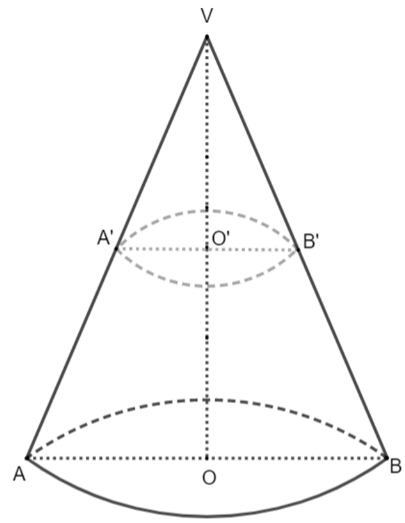
Din **a)** rezultă că $A_{\Delta AFE} = 4A_{\Delta ABD} \Rightarrow A_{BEFD} = A_{\Delta AFE} - A_{\Delta ABD} = 3A_{\Delta ABD} = 3 \cdot \dfrac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 75\ cm^2$.

Obținem $\dfrac{A_{\bigcirc}}{A_{BEFD}} = \dfrac{25\pi}{75} = \dfrac{\pi}{3}$.

**6. a)** $A_b = \pi R^2 = 49\pi \Rightarrow R = 7\ cm$.

În triunghiul $VOA$ dreptunghic $\sphericalangle VOA = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora:

$VA^2 = VO^2 + AO^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$, de unde obținem generatoarea conului $VA = 25\ cm$.




**6. b)** Înălțimea trunchiului de con este $h' = OO' = \dfrac{VO}{2} = 12\ cm$. Din asemănarea triunghiurilor $\Delta VO'A' \sim \Delta VOA$ rezultă că: $\dfrac{VO'}{VO} = \dfrac{VA'}{VA} = \dfrac{O'A'}{OA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$r = \dfrac{7}{2} = 3,5\ cm$ și $VA' = \dfrac{VA}{2} = \dfrac{25}{2} = 12,5\ cm$

Deci generatoarea trunchiului de con este $G' = AA' = \dfrac{25}{2} = 12,5\ cm$.

Obținem: $A_{trunchi} = \pi\left(R + r\right)G' + \pi R^2 + \pi r^2 = 131,25\pi + 49\pi + 12,25\pi \Rightarrow A_{trunchi} = 192,5\pi\ cm^2$ și

$$V_{trunchi} = \frac{\pi h'}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right) = \frac{12\pi}{3}\left(49 + 12,25 + 24,5\right) = 343\pi\ cm^3.$$