MATEMATICĂ

Teste rezolvate Bacalaureat

Specializări:

- matematică-informatică
- științe ale naturii
- tehnologic

Portal ÎNVĂȚĂMÂNT
www.portalinvatamant.ro

TEST 1

Subiectul I

1) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{-1+x}{3}$. Calculaţi $f(-3) \cdot f(-2) \cdot ... \cdot f(3)$.
2) Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $\log_3(2x - 3955) = 4$.
3) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi inecuaţia : $x^2 - x - 10 < 2$.
4) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea $M = \{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, ... , \sqrt[3]{100}\}$, acesta să fie iraţional.
5) Fie punctele $A(-3, 0), B(0, -4)$. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB}$.
6) Se consideră triunghiul ABC cu $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{6}$ .Să se calculeze $\cos B$.

Subiectul II

1) Se consideră matricele $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & lgx & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, x > 0$.
   a) Să se calculeze $\det(M(x)), \forall x > 0$.
   b) Să se arate că $M(x) \cdot M(y) = M(xy), \forall x, y > 0$.
   c) Să se calculeze $M(1) + M(2) + \cdots + M(2018)$.
2) Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.
   a) Să se calculeze produsul elementelor inversabile în raport cu înmulţirea din inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.
   b) Să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ecuaţia $\hat{4}x + \hat{2} = \hat{6}$.
   c) Să se rezolve în inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ sistemul $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$.

Subiectul III

1) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \geq 0 \\ 2^x + 2017, & x < 0 \end{cases}$ unde $a \in \mathbb{R}$.
   a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia f să fie continuă în $x_0 = 0$.
   b) Să se arate că funcţia f' este crescătoare pe $(0; \infty), \forall a \in \mathbb{R}$.
   c) Să se calculeze $\lim_{x \to -\infty}((f(x) - 2017) \cdot x)$.
2) Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x + 2}$.
   a) Să se calculeze $\int f^2(x)dx$.

b) Să se determine aria suprafeţei plane cuprinse între graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 1$.

c) Folosind eventual faptul că $\sqrt{x + 2} \leq \sqrt{3}$, $\forall\, x \in [0,1]$, să se arate că $\int_0^1 x^{2017} f(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2018}$.

REZOLVARE
TEST 1

Subiectul I

1) $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1+x}{3} = 0 \Rightarrow -1 + x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(-3) \cdot f(-2) \cdot \ldots \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$
2) Avem condiţia de existenţă : $2x - 3955 > 0 \Rightarrow 2x > 3955 \Rightarrow x > 1977{,}5 \Rightarrow$

$x \in (1977{,}5; \infty)$ .Din $\log_3(2x - 3996) = 4 \Rightarrow 2x - 3955 = 3^4 \Rightarrow 2x = 81 + 3955 \Rightarrow$

$2x = 4036 \Rightarrow x = 2018 \in (1977{,}5; \infty) \Rightarrow S = \{2018\}$.

3) $x^2 - x - 10 < 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 < 0$. Ecuaţia $x^2 - x - 12 = 0$ are soluţiile

$x_1 = -3$, $x_2 = 4$. Din tabelul de semne obţinem $x \in (-3; 4)$, cum $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \Rightarrow S = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

4) Cuburi perfecte mai mici decât 100 sunt : $1^3 = 1, 2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64$. Deci din

mulţimea $M = \{\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \ldots, \sqrt[3]{100}\}$ numere raţionale sunt $\sqrt[3]{1} = 1, \sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{27} = 3, \sqrt[3]{64} = 4$ (deci 4 numere raţionale) ⇒ cazuri favorabile vor fi 100 - 4=96 (numere iraţionale) .

$$probabilitatea = \frac{număr\ cazuri\ favorabile}{număr\ cazuri\ posibile} = \frac{96}{100} = 0{,}96\ sau\ 96\%\ .$$

5) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.
6) Din teorema cosinusului $\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{3+6-2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{7}{6\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$.

Subiectul II

1) a) $\det(M(x)) = \begin{vmatrix} 1 & lgx & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot x = x$ (ceilalţi termini ai dezvoltării sunt toţi nuli)

b) $M(x) \cdot M(y) = \begin{pmatrix} 1 & lgx & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & lgy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & lgx + lgy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & lgxy & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{pmatrix} = M(xy), \forall\, x, y > 0$.

c) $M(1) + M(2) + \cdots + M(2018) = \begin{pmatrix} 1 & lg1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & lg2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \cdots +$
$\begin{pmatrix} 1 & lg2018 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2018 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{1+1+\cdots+1}_{de\ 2018\ ori} & lg1+lg2+\cdots+lg2018 & 0 \\ 0 & \underbrace{1+1+\cdots+1}_{de\ 2018\ ori} & 0 \\ 0 & 0 & 1+2+\cdots+2018 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2018 & \lg(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2018) & 0 \\ 0 & 2018 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2018\cdot 2019}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2018 & \lg(2018!) & 0 \\ 0 & 2018 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2018\cdot 2019}{2} \end{pmatrix}.$$

2) a) Mulţimea elementelor inversabile este: $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \widehat{11}\}$ (un element $\hat{a}$ este inversabil în $\mathbb{Z}_{12} \Leftrightarrow (a,12) = 1$)$\Rightarrow$ $\hat{1}\cdot\hat{5}\cdot\hat{7}\cdot\widehat{11} = \hat{1}$.

b) $\hat{4}x + \hat{2} = \hat{6}, x \in \mathbb{Z}_{12}$ $\Leftrightarrow \hat{4}x + \hat{2} + \widehat{10} = \hat{6} + \widehat{10}$ $\Leftrightarrow \hat{4}x = \hat{4} \Rightarrow x \in \{\hat{1}, \hat{4}, \hat{7}, \widehat{10}\}$.

c) $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$. Pentru a reduce necunoscuta y înmulţim prima ecuaţie cu $-\hat{3} = \widehat{12-3} = \hat{9}$

în $\mathbb{Z}_{12}$ $\begin{cases} x + y = \hat{2} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{9}x + \hat{9}y = \hat{6} \\ \hat{2}x + \hat{3}y = \hat{5} \end{cases}$ adunând cele două ecuaţii obţinem $\widehat{11}x = \widehat{11} \Rightarrow$

$x \in \{\hat{1}\}$. Pentru $x = \hat{1}$ prima ecuaţie din sistem devine $\hat{1} + y = \hat{2} \Rightarrow y = \hat{1}$ (1)

Pentru $x = \hat{1}$ a doua ecuaţie din sistem devine $\hat{2} + \hat{3}y = \hat{5} \Rightarrow \hat{3}y = \hat{3} \Rightarrow y \in \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{9}\}$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ soluţia sistemului este $S = \{(\hat{1}, \hat{1})\}$.

Subiectul III

1) a) f este continuă în $x_0 = 0$ $\Leftrightarrow$ $l_s(0) = l_d(0) = f(0)$.

$l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(2^x + 2017) = 2018$; $l_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x^2 + a) = a$;

$f(0) = a \Rightarrow a = 2018$

b) Pentru $x > 0 \Rightarrow f'(x) = (x^2 + a)' = 2x \Rightarrow f''(x) = (2x)' = 2 > 0, \forall x > 0, \forall a \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

f' este crescătoare pe $(0;\infty), \forall a \in \mathbb{R}$

c)$\lim_{x\to-\infty}((f(x) - 2017)\cdot x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2^x\cdot x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2^{-x}} = 0.$

2) a) $\int f^2(x)dx = \int \sqrt{x+2}^2 dx = \int (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C.$

b) $A = \int_0^1 |f(x)|dx$. Cum $f(x) = \sqrt{x+2} > 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow |f(x)| = f(x)$ pentru

$x \in [0,1] \Rightarrow A = \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x+2}\,dx = \int_0^1 (x+2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\,\Big|_0^1 = \frac{6\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{6\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{3}$.

c) Deoarece $\sqrt{x+2} \le \sqrt{3}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \le \sqrt{3}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow$

$x^{2017} f(x) \le x^{2017}\sqrt{3}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 x^{2017} f(x)dx \le \int_0^1 x^{2017}\sqrt{3}dx = \sqrt{3}\int_0^1 x^{2017}dx = \sqrt{3}\cdot\frac{x^{2018}}{2018}\Big|_0^1 = \sqrt{3}\cdot\left(\frac{1^{2017}}{2018} - \frac{0^{2017}}{2018}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2018} \Rightarrow \int_0^1 x^{2017} f(x)dx \le \frac{\sqrt{3}}{2018}$