Mihael Mihalcea (coord.), Radu-Cătălin Gherghe,
Sorina Lupu, Tudor-Eugen Lupu

EVALUAREA NAȚIONALĂ

MATEMATICĂ

CLASA A VIII-A

$\frac{a^m}{a^n} = a^{\ldots}$

$x = \sqrt{\frac{b^2}{c} + c} - \frac{b}{2}$

Probleme rezolvate de tipul celor de la Subiectul al III-lea

R&S RENTROP & STRATON

Portal ÎNVĂȚĂMÂNT
www.portalinvatamant.ro

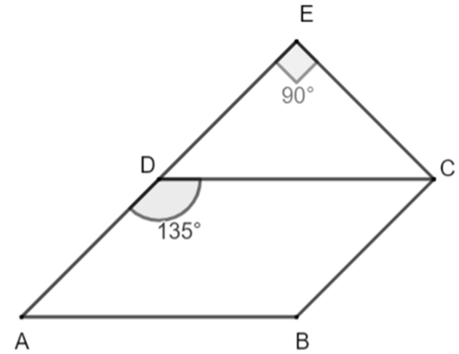
TESTE

Testul nr. 1

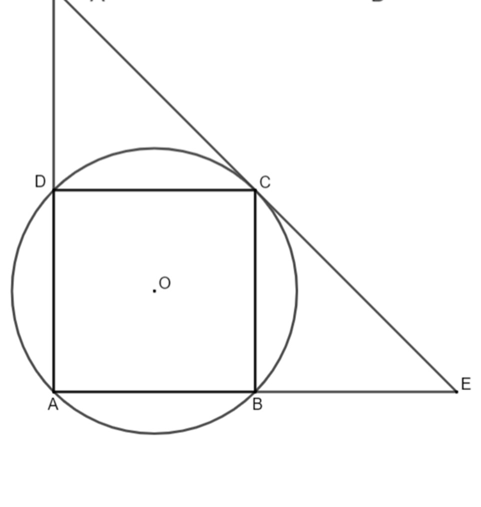
1. Într-un gospodărie se găsesc 27 de oi și rațe. Numărul de picioare ale oilor și rațelor este egal cu 78.
a) Este posibil ca în gospodărie să se afle 20 de rațe? Justifică răspunsul dat.
b) Determină numărul oilor din gospodărie.

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}\right):\frac{x^2-49}{(x+5)(x+7)}$, unde x este număr real, $x \neq -5$, $x \neq 5$, $x \neq 7$.
a) Arată că $E(x)=\frac{3}{x-7}$, unde x este număr real, $x \neq -5$, $x \neq 5$, $x \neq 7$.
b) Determină numerele naturale n pentru care $E(n)$ este număr natural.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$.
a) Arată că $2\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)=f(0)$.
b) Rezolvă în mulțimea numerelor naturale inecuația $f(n)\leq 0$.



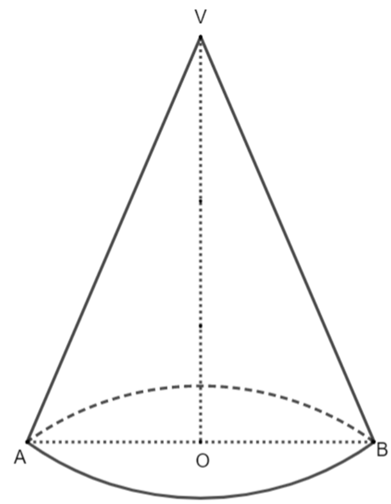
4. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $\sphericalangle ADC=135^\circ$, $AB=8\,cm$ și $AD=3\sqrt{2}\,cm$, iar triunghiul dreptunghic isoscel DCE are ipotenuza DC.
a) Arată că punctele A, D și E sunt coliniare.
b) Determină perimetrul și aria patrulaterului $ABCE$.



5. În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$, înscris într-un cerc de centru O și diametrul de $10\,cm$. Tangenta la cerc în punctul C intersectează dreptele AB și AD în punctele E și F.
a) Arată că BD este linie mijlocie în triunghiul EAF.

b) Determină raportul dintre aria cercului și aria patrulaterului $BEFD$.

6. În figura alăturată este reprezentat un con cu înălțimea $VO = 24\,cm$ și aria bazei $49\pi\ cm^2$.



a) Arată că generatoarea conului este egală cu $25\,cm$.

b) Determină aria totală și volumul triunghiului de con obținut prin secționarea conului cu un plan paralel cu baza ce împarte înălțimea în două părți egale.

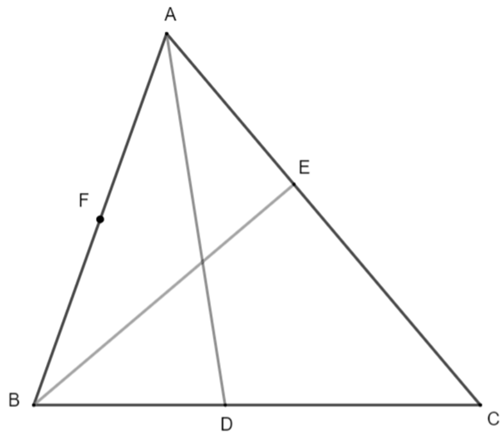
Idei/Observații/Note

Testul nr. 2

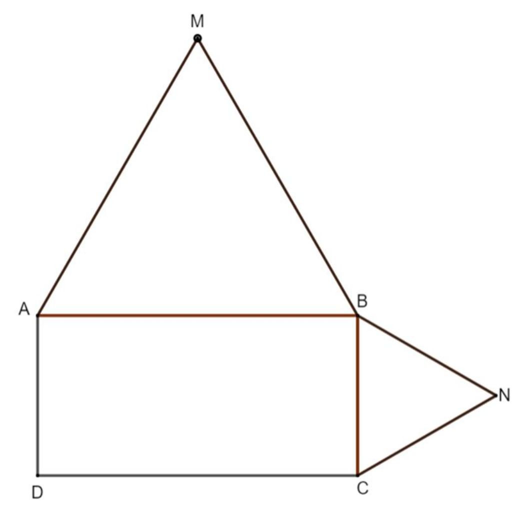
1. Suma a două numere naturale este egală cu 15 și produsul lor este egal cu 56.
a) Este posibil ca unul dintre numere să fie de două ori mai mare decât celălalt? Justifică răspunsul dat.
b) Determină cele două numere naturale.

2. Se consideră expresia $E(x)=2(x+4)^2-2$, pentru orice număr real x.
a) Calculează $E(-2)$.
b) Determină numerele întregi n pentru care $E(n)=0$.

3. Se consideră numerele: $a=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ și $b=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.
a) Arată că $a^2+b^2=60$.
b) Demonstrează că $\frac{1}{a+3\sqrt{2}}+\frac{1}{b-2\sqrt{3}}>\frac{1}{2}$.



4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, cu înălțimile $AD\perp BC$, $D\in[BC]$ și $BE\perp AC$, $E\in[AC]$, iar punctul F este mijlocul segmentului $[AB]$.
a) Arată că triunghiul DEF este isoscel.
b) Demonstrează că, dacă $\sphericalangle ABE=30^\circ$, atunci triunghiul AEF este echilateral.

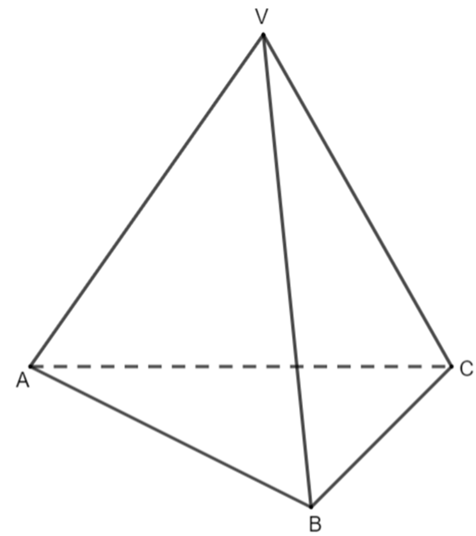


5. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu lungimea AB de două ori mai mare decât lățimea BC și triunghiurile echilaterale MAB și NBC.
a) Arată că $\Delta ABN\equiv\Delta MBC$.
b) Arată că aria dreptunghiului este mai mică decât suma ariilor triunghiurilor echilaterale.

6. În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu înălțimea de $5cm$ și muchia $VA=10cm$.

a) Arată că latura bazei este egală cu $15cm$.

b) Determină distanța de la punctul A la planul (VBC).



Idei/Observații/Note

SUGESTII DE REZOLVARE

Testul nr. 1

1. a) Nu. Dacă în gospodărie ar fi 20 de rațe atunci număr oilor ar fi egal cu 7. În acest caz numărul total de picioare ar fi $20\cdot 2+7\cdot 4=20+28=48\neq 78$.

1. b) Notăm cu x numărul oilor și cu y numărul rațelor. Obținem următorul sistem de ecuații:
$\begin{cases} x+y=27 \\ 4x+2y=78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=54 \\ 4x+2y=78 \end{cases} \Rightarrow 2x=24$, de unde obținem $x=12$.

2. a) $E(x)=\dfrac{2(x-5)+x+5-10}{(x-5)\cancel{(x+5)}}\cdot\dfrac{\cancel{(x+5)}\cancel{(x+7)}}{(x-7)\cancel{(x+7)}}=\dfrac{2x-10+x+5-10}{(x-5)(x-7)}=\dfrac{3x-15}{(x-5)(x-7)}=$

$=\dfrac{3\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-7)}=\dfrac{3}{x-7}$, unde x este număr real, $x\neq -5$, $x\neq 5$, $x\neq 7$.

2. b) $E(n)=\dfrac{3}{n-7}$, unde n este număr natural, $n\neq 5$, $n\neq 7$.

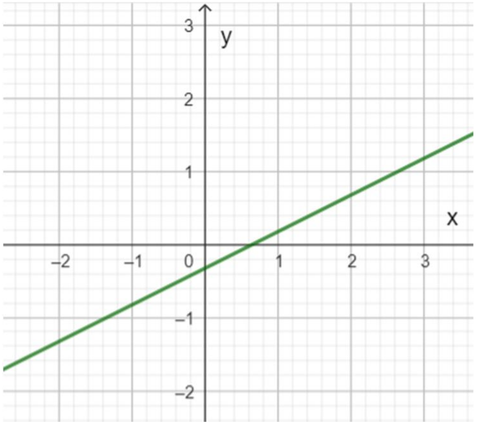
$\dfrac{3}{n-7}$ este număr natural dacă și numai dacă $n-7\in\{1,3\}$. Obținem $n\in\{8,10\}$.

3. a) Avem $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}$ și $f(0)=\dfrac{1}{2}\cdot 0-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$.

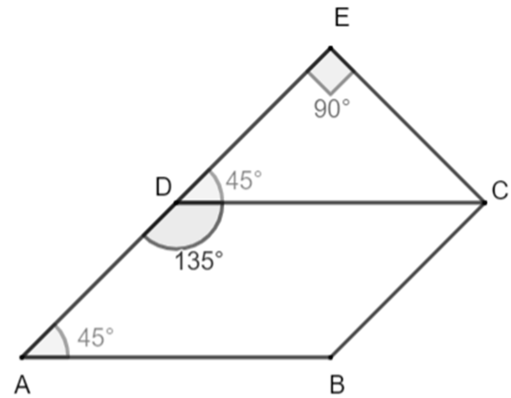
$2\cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right)=2\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)=-\dfrac{1}{3}=f(0)$.

3. b) $\dfrac{1}{2}\cdot n-\dfrac{1}{3}\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cdot n\leq\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow n\leq\dfrac{2}{3}$ și cum n este număr natural rezultă $n=0$.

Soluția poate fi dedusă și din reprezentarea grafică a funcției.



4. a) Deoarece triunghiul EDC este dreptunghic isoscel cu $\sphericalangle DEC = 90^\circ$ rezultă că $\sphericalangle EDC = 45^\circ$.
Avem $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADB + \sphericalangle EDC = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, de unde deducem că punctele A, D și E sunt coliniare.



4. b) În triunghiul DEC, $\sphericalangle DEC = 90^\circ$, $\sphericalangle EDC = 45^\circ$.
Rezultă că $\sin(\sphericalangle EDC) = \dfrac{EC}{DC}$, de unde obținem

$EC = DC \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\ cm$. Cum triunghiul EDC este isoscel rezultă că $DE = 4\sqrt{2}\ cm$ și obținem $AE = AD + DE = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}\ cm$.

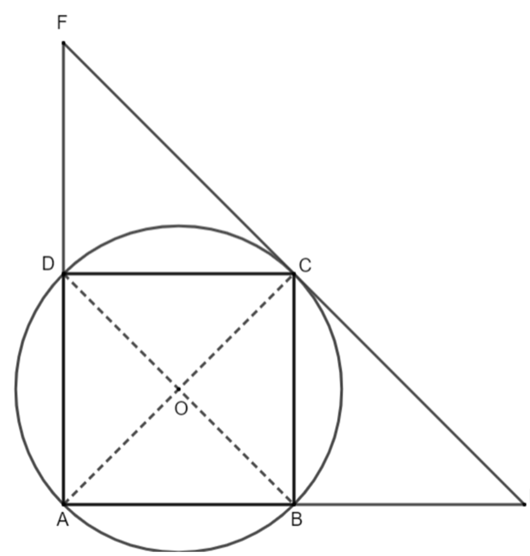
$$P_{ABCE} = AB + BC + CE + EA = 8 + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 8 + 14\sqrt{2} = 2\left(4 + 7\sqrt{2}\right) cm.$$

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CDE = 45^\circ$, unghiuri corespondente determinate de dreptele paralele AB și CD tăiate de secanta AF.

$$A_{ABCE} = A_{ABCD} + A_{DCE} = AD \cdot AB \cdot \sin(\sphericalangle BAD) + \frac{EC \cdot ED}{2} = 8 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 8 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24\ cm^2 + 16\ cm^2 = 40\ cm^2.$$

5. a) Evident, punctul O este intersecția diagonalelor pătratului. Avem $EF \perp OC$ și $OC \perp BD$ de unde rezultă că $EF \parallel BD$ și cum $DC \parallel BE$ rezultă că patrulaterul $BDCE$ este paralelogram, deci $BD = CE$.
Analog se arată că $BD = FC$.
Deci, $BD = \dfrac{EF}{2}$. Rezultă că BD este linie mijlocie în triunghiul AEF.



5. b) Raza cercului este egală cu $5\,cm$, iar latura pătratului este $AB = R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ cm$.
Aria cercului este $A = \pi R^2 = 25\,\pi\ cm^2$.
Din **a)** rezultă că

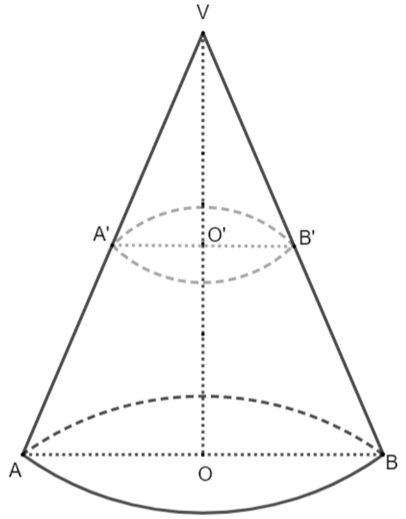
$$A_{\Delta AFE} = 4A_{\Delta ABD} \Rightarrow A_{BEFD} = A_{\Delta AFE} - A_{\Delta ABD} = 3A_{\Delta ABD} = 3 \cdot \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 15\ cm^2.$$

Obținem $\frac{A_{\bigcirc}}{A_{BEFD}} = \frac{25\pi}{15} = \frac{5\pi}{3}$.

6. a) $A_b = \pi R^2 = 49\pi \Rightarrow R = 7\ cm$.

În triunghiul VOA dreptunghic $\sphericalangle VOA = 90^\circ$ aplicăm teorema lui Pitagora:

$VA^2 = VO^2 + AO^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$, de unde obținem generatoarea conului $VA = 25\,cm$.



6. b) Înălțimea trunchiului de con este

$h' = OO' = \frac{VO}{2} = 12\ cm$. Din asemănarea triunghiurilor

$\Delta VO'A' \sim \Delta VOA$ rezultă că: $\frac{VO'}{VO} = \frac{VA'}{VA} = \frac{O'A'}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$r = \frac{7}{2} = 3{,}5\,cm$ și $VA' = \frac{VA}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5\,cm$

Deci generatoarea trunchiului de con este $G' = OO' = \frac{25}{2} = 12{,}5\,cm$.

Obținem: $A_{trunchi} = \pi\left(R + r\right)G' + \pi R^2 + \pi r^2 = 131{,}25\pi + 49\pi + 12{,}25\pi \Rightarrow A_{trunchi} = 192{,}5\pi\ cm^2$ și

$V_{trunchi} = \frac{\pi h'}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right) = \frac{12\pi}{3}\left(49 + 12{,}25 + 24{,}5\right) = 343\pi\ cm^3$.

Testul nr. 2

1. a) **Nu**. Fie a și b cele două numere naturale. Dacă $a=2b$, cum suma lor este egală cu 15 ar rezulta că $b=5$ contradicție cu faptul că produsul numerelor este 56, număr care **nu** se divide cu 5.

1. b) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=15^2-2\cdot 56=113$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=113-2\cdot 56=113-112=1$, de unde rezultă $|a-b|=1$, și cum cele două numere sunt naturale rezultă că acestea sunt numere naturale consecutive.

Obținem $a=7$ și $b=8$ sau $a=8$ și $b=7$, ce verifică condițiile impuse.

2. a) $E(-2)=2(-2+4)^2-2=2\cdot 2^2-2=2\cdot 4-2=8-2=6$.

2. b) $E(n)=2(n+4)^2-2=2\left[(n+4)^2-1\right]=2(n+4-1)(n+4+1)=2(n+3)(n+5)$, pentru orice număr întreg n.

$2(n+3)(n+5)=0$, de unde se obține $n=-3$ sau $n=-5$, care convin.

3. a) $a^2+b^2=\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)^2=18\cancel{-12\sqrt{6}}+12+18+\cancel{12\sqrt{6}}+12=60$.

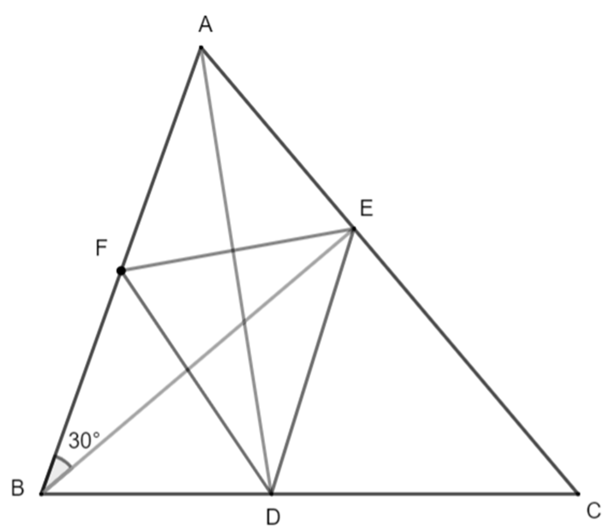
3. b) $\dfrac{1}{a+3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{b-2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6}$.

$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6}>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{3}+\sqrt{2}>3\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2>9\Leftrightarrow 5+2\sqrt{6}>9\Leftrightarrow 2\sqrt{6}>4\Leftrightarrow\sqrt{6}>2\Leftrightarrow\sqrt{6}>\sqrt{4}$

Adevărat

Deci, $\dfrac{1}{a+3\sqrt{2}}+\dfrac{1}{b-2\sqrt{3}}>\dfrac{1}{2}$.

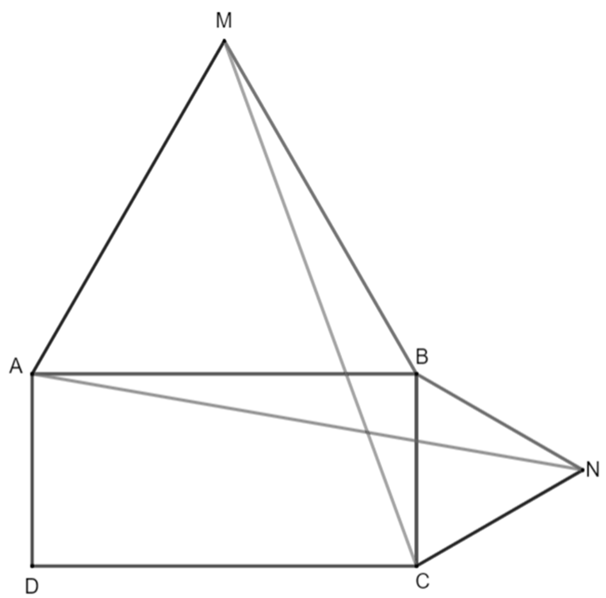
4. a) În triunghiul dreptunghic ABD, DF este mediana corespunzătoare ipotenuzei AB, deci $DF=\dfrac{AB}{2}$. Analog în triunghiul dreptunghic ABE, EF este mediana corespunzătoare ipotenuzei AB, deci $EF=\dfrac{AB}{2}$. Avem $DF=EF$, de unde rezultă că triunghiul DEF este isoscel.



4. b) În triunghiul ABE, $\sphericalangle AEB = 90^\circ$, $\sphericalangle ABE = 30^\circ$, folosind teorema unghiului de 30°, rezultă că $AE = \frac{AB}{2}$.

Dar punctul F este mijlocul segmentului $[AB]$, deci $AF = \frac{AB}{2} \Rightarrow AE = AF \Rightarrow \Delta AEF$ isoscel.

$\sphericalangle BAE = 180^\circ - (\sphericalangle AEB + \sphericalangle ABE) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Cum triunghiul isoscel AEF și are $\sphericalangle A = 60^\circ$ rezultă că ΔAEF este echilateral.



5. a) În triunghiul ABN,
$\sphericalangle ABN = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BNC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.
În triunghiul MBC,
$\sphericalangle MBC = \sphericalangle MBA + \sphericalangle ABC = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.

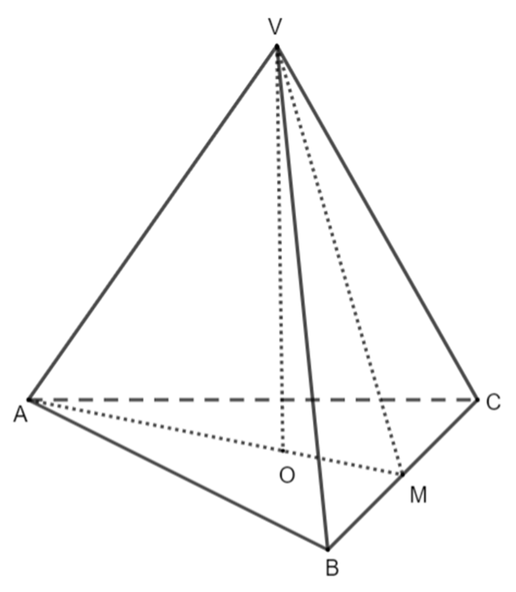
$$\left.\begin{array}{l|l} \Delta ABN & AB \equiv MB \\ & \sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle MBC \\ \Delta MBC & BN \equiv BC \end{array}\right. \overset{L.U.L}{\Rightarrow} \Delta ABN \equiv \Delta MBC$$

5. b) Fie $BC = l$ lățimea dreptunghiului $ABCD$.
Rezultă $A_{ABCD} = AB \cdot BC = 2l \cdot l = 2l^2$.

$$A_{\Delta AMB} + A_{\Delta BNC} = \frac{(2l)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{5l^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$A_{\Delta AMB} + A_{\Delta BNC} > A_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{5l^2\sqrt{3}}{4} > 2l^2 \Leftrightarrow 5\sqrt{3} > 8 \Leftrightarrow 75 > 64$$

ceea ce este evident.



6. a) Fie O centrul bazei ABC (centrul cercului circumscris triunghiului ABC).
În triunghiul VOA, dreptunghic ($\sphericalangle VOA = 90^\circ$) se aplică teorema lui Pitagora și se obține:
$AO^2 = VA^2 - VO^2 = 100 - 25 = 75$, de unde rezultă
$AO = 5\sqrt{3}\ cm$.

Avem $AO = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{3}$, de unde se obține

$$AB=\frac{3AO}{\sqrt{3}}=\frac{3\cdot5\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}}=15\,cm.$$

6. b) Volumul piramidei este $V=\dfrac{A_{ABC}\cdot VO}{3}=\dfrac{\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}\cdot VO}{3}=\dfrac{\dfrac{225\sqrt{3}}{4}\cdot5}{3}=\dfrac{1125\sqrt{3}}{12}\,cm^3$.

În triunghiul VBC, ducem $VM\perp BC$. În triunghiul VMC dreptunghic, $\sphericalangle VMC=90^\circ$ se aplică teorema lui Pitagora: $VC^2=VM^2+MC^2$. Rezultă:

$VM^2=VC^2-MC^2=100-\dfrac{225}{4}=\dfrac{175}{4}$, de unde se obține $VM=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\,cm$.

Aria triunghiului VBC este $A_{\Delta VBC}=\dfrac{VM\cdot BC}{2}=\dfrac{\dfrac{5\sqrt{7}}{2}\cdot15}{2}=\dfrac{75\sqrt{7}}{4}\,cm^2$.

Volumul piramidei poate fi scris $V=\dfrac{A_{\Delta VBC}\cdot d\left(A,(VBC)\right)}{3}$, de unde se obține:

$$d\left(A,(VBC)\right)=\frac{3\cdot V}{A_{\Delta VBC}}=\frac{3\cdot\dfrac{1125\sqrt{3}}{12}}{\dfrac{75\sqrt{7}}{4}}=\frac{15\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{15\sqrt{21}}{7}\,cm.$$