Viorel Vlad

Teste rezolvate de matematică clasa a XI-a

Pregătire pentru Bacalaureat

Specializarea Matematică-Informatică (M1)

R&S RENTROP & STRATON

Portal ÎNVĂȚĂMÂNT
www.portalinvatamant.ro

TEST

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

Testul nr. 1

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real x știind că numerele 2020, x și 2022 sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a, a \in \mathbb{R}$. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ f)(x) = x + 2020$ pentru orice număr real x.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x-3} = \sqrt{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor să fie mai mare decât 51.

5p **5.** Determinați numerele reale a și b știind că, în reperul cartezian xOy , punctul de intersecție a dreptelor $x - (a + 1010)y + 2021 = 0$ și $x + by - 5 = 0$ este $A(a, 2)$.

5p **6.** Demonstrați că $\frac{sin\ 2x}{1+cos2x} = \frac{1}{ctgx}$, pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

5p **1.** În mulțimea $\mathcal{S}_3$ a permutărilor de 3 elemente, se consideră permutarea: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Să se verifice dacă permutarea este pară

b) Să se calculeze σ^{2022}

c) Să se rezolve ecuația $x^2 = \sigma\ cu\ x \in \mathcal{S}_3$.

5p **2.** Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), și\ matricea\ \mathcal{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Să se calculeze $A(1)^{2021}$.

b) Să se calculeze determinantul matricei $\mathcal{I}_3 + A(1) + A(1)^t$.

c) Dacă $B(x) = A(x) + \mathcal{I}_3$, să se calculeze $B(1) + B(2) + \cdots + B(2021)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. S Se consideră șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit astfel: $x_0 =\sqrt{2}, x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \forall n \geq 1$

5p a) Să se studieze mărginirea.

5p b) Să se studieze monotonia.
5p c) Să se studieze convergența și să se calculeze limita.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} 2021^{x+1}-3, & x\le -1 \\ 2x^3+(a-3)x-4, & x>-1 \end{cases}, a\in\mathbb{R}$.

5p a) Determinați numărul real a pentru care funcția este continuă în $x=-1$.
5p b) Să se rezolve ecuația $f(x)=-2, pentru\ x\le -1$.
5p c) Să se calculeze $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$, pentru a=3.

SUCCES!

SUGESTIE DE REZOLVARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

Testul nr. 1

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	Condiția ca trei numere reale să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice: $x = \frac{2020+2022}{2} \Rightarrow 2x = 4042 \Rightarrow x = 2021$.
2.	$(f \circ f)(x) = x + 2020 \Rightarrow f(f(x)) = x + 2020 \Rightarrow f(x) + a = x + 2020 \Rightarrow (x + a) + a = x + 2020 \Rightarrow 2a = 2020 \Rightarrow a = 1010$.
3.	$2^{x-3} = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{x-3} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3 + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile. Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor mai mare decât 51 sunt: 69, 78, 79, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99. Deci avem 10 cazuri favorabile. Probabilitatea este: $p = \frac{nr.\ cazuri\ favorabile}{nr.\ cazuri\ posibile} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$
5.	Deoarece $A(a, 2)$ este punctul de intersecție al celor două drepte, coordonatele punctului verifică cele două ecuații. Se formează sistemul: $\begin{cases} a - (a + 1010) \times 2 + 2021 = 0 \\ a + b \times 2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2a - 2020 + 2021 = 0 \\ a + 2b - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} -a + 1 = 0 \\ a + 2b - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = (5 - a)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = (5 - 1)/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$
6.	$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1}{ctgx}$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{2\times sinx \times cosx}{((cosx)^2+(sinx)^2)+((cosx)^2-(sinx)^2)} = \frac{1}{\frac{cosx}{sinx}}$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{2\times sinx\times cosx}{2\times(cosx)^2} = \frac{sinx}{cosx}$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow \frac{sinx}{cosx} = \frac{sinx}{cosx}$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ Adevărat.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. a)	Perechea (i, j) se numeste inversiune a permutării σ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$. Numărul inversiunilor îl notăm $m(\sigma)$. $m(\sigma) = 1 + 1 = 2, \varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^2 = 1$, *deci σ este permutare pară.*

b)	$\sigma^2=\sigma\circ\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \sigma(\sigma(1)) & \sigma(\sigma(2)) & \sigma(\sigma(3))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $\sigma^3=\sigma^2\circ\sigma=$ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=e$, $\sigma^{2022}=(\sigma^3)^{674}=e^{674}=e$.
c)	Dacă $x\in\mathcal{S}_3$ ar fi o permutare impară, atunci $x^2=e$. Deci $x=\sigma^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$
2. a)	$A(1)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A(1)^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. $Deci\ A(1)^{2021}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
b)	$\mathcal{I}_3+A(1)+A(1)^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ Determinantul matricei este egal cu 0.
c)	$B(x)=A(x)+\mathcal{I}_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ x & 0 & 0\\ x & x & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ x & x & 1\end{pmatrix}$ $1+2+\ldots+2021=\frac{2021\times(2021+1)}{2}=\frac{2021\times2022}{2}=2021\times1011=2043231$ $B(1)+B(2)+\cdots+B(2021)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}+\cdots+$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2021 & 1 & 0\\ 2021 & 2021 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2021 & 0 & 0\\ 2043231 & 2021 & 0\\ 2043231 & 2043231 & 2021\end{pmatrix}$

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. a)	Observăm că $x_0,x_1\in(0,2)$. Demonstrăm prin inducție propoziția: $P(n): 0<x_n<2, \forall n\in\mathbb{N}$ Etapa de verificare: $P(0): 0<x_0<2$, afirmația este adevărată. Etapa de demonstrație: $P(n)\Rightarrow P(n+1)$ $P(n+1): 0<x_{n+1}<2$ *este afirmația care trebuie demonstrată*, *în condițiile în care* $P(n)$ *este adevărată*. $0<x_{n+1}<2$ se scrie cu ajutorul relației de recurență $0<\sqrt{2+x_n}<2$ Cum $P(n)$ *este adevărată obținem* $0<\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}<\sqrt{4}=2$ Deci $P(n)$ *este adevărată* $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1, \Rightarrow$ *șirul este mărginit*.

b)	Avem $x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n \leq \sqrt{2 + x_n} \Leftrightarrow x_n^2 \leq 2 + x_n \Leftrightarrow x_n^2 - x_n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x_n^2 - 1) - (x_n + 1) \leq 0 \Leftrightarrow (x_n + 1)(x_n - 1 - 1) \Leftrightarrow (x_n + 1)(x_n - 2) \leq 0$, adevarat deoarece $0 < x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Deci șirul este monoton crescător.
c)	Conform rezultatelor de la a) și b), șirul este monoton crescător și mărginit superior. Deci șirul este convergent. Fie l limita șirului. $x_{n+1} \leq \sqrt{2 + x_n}, trecând\ la\ limită \Leftrightarrow l \leq \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0,\ l_1 = -1(nu\ convine)$ și $l_2 = 2(limita\ șirului)$
2. a)	Funcția este continuă în $x = -1$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (2021^{x+1} - 3) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (2x^3 + (a - 3)x - 4) = f(-1) \Leftrightarrow -2 = -3 - a = -2 \Leftrightarrow a = -1.$
b)	$f(x) = -2, pentru\ x \leq -1 \Leftrightarrow 2021^{x+1} - 3 = -2 \Leftrightarrow 2021^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$
c)	$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2(x+1)^3 - 4}{2x^3 - 4} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 6x^2 + 6x - 2}{2x^3 - 4} = 1.$